De

æquationibus Riccatianæ similibus algebraice integrabilibus

Dissertatio,

quam

Consent. Ampliss. Ord. Philos. Lund.

p. p.

JOH. AUG. AHLANDER,
Philos. Mag.

et

CAROL. GUST. AHLANDER,
V. D. M., Smolandi.

In Acad. Carol. die XXXI Maji MDCCCXLVIII.

P. I.

Lundæ,
typis Berlingianis.
MDCCCXLVIII.

Centum jam viginti, et quod excurrit, anni præterlapsi sunt, postquam comes ille Jac. Riccati animadversiones suas in æquationes differentiales secundi gradus actis eruditorum Lipsiensium curavit inserendas; [1]) in quibus etiam proposuit Geometris solvendum problema illud notissimum quærens, qua ratione in formula:

$$x^m dq = du + u^2 dx : q$$

(quæ postea in Analysi semper Ejus nomine fuit insignita æquatio), dato ad libitum exponente m, positaque quantitate $q = x^n$, determinandi sint valores alterius exponentis n, ut succedat indeterminatarum separatio, et æquationis constructio per solas quadraturas?

Haud ita diu exspectatum est, priusquam Dan. Bernoulli problematis propositi dedit solutionem [2]). Præter hunc vero etiam frater ejus Nicol. Bernoulli, paterque eorum atque patruelis, omnes eodem propemodum tempore, varias ejusdem problematis dederunt solutiones [3]). Quæ quidem, etsi alia aliunde petita, in eundem tamen exeunt finem. Conveniunt enim in eo omnes, quod statuunt, variabiles æquationis propositæ quantitates, tunc semper posse separari, ideoque æqua-

---

[1]) Vide: Actor. Erudit. Supplem. Tom. VIII, Sect. II. pag. 66. 1724.

[2]) Act. Erud. Suppl. Tom. VIII. pag. 73.

[3]) Montucla, Hist. des Mathem. Tom. III. pag. 177.

tionem ipsam esse integrabilem, quoties valor exponentis m per hanc formulam exprimi potest:

$$m = \frac{(2h \pm 1)(-n) - 4h}{2h \mp 1},$$

h scilicet existente numero quolibet integro positivo, denotante vero n alium quemcumque sive integrum numerum sive fractum. Comprobat etiam cel. Joh. Bernoulli [4]) dari interdum casus, in quibus æquatio hujusmodi

$$as^m + bu^q s^p = \frac{du}{s},$$

(quæ, posito $q=2$, in Riccatianam abit), non tantum ad separabilitatem differentialium reduci potest, sed omnino algebraice exprimi, quando scilicet $m = \frac{p+q}{1-q}$; ostenditque huic formulæ tunc respondere æquationem curvæ cujusdam ad genus parabolarum pertinentis.

Ostendit postea cel. Euler, quomodo pro æquatione Riccatiana valores exponentis m definiantur ut ad separationem variabilium reducatur æquatio, pervenitque ad hanc generalem expressionem valorum exponentis m:

$$m = \frac{-4h}{2h \pm 1},$$

quæ a formula illa, supra citata, facile deducitur, posito tantum in eadem $n = o$.

Cel. Bougainville, in indagandis conditionibus, sub quibus integrari potest, æquatio Riccatiana, occupatus, invenit etiam eandem formulam valores exponentis m exhibentem; ostenditque idem, quomodo inveniatur æquatio algebraica æquationi:

$$-ax^{\frac{-4h}{2h \pm 1}} + by^2 = \frac{dy}{x}$$

---

[4]) Joh. Bernoulli Opera Tom. IV. pag. 49.

respondens. Quam quidem solutionem algebraicam invenit methodo ingeniosissima; comparando scilicet æquationem propositam alii cuidam ejusdem formæ, in qua vero altera variabilium deest; hac logaritmorum ope interata, substitutione quadam idonea pervenit ad æquationem algebraicam, quæ ut integrale æquationis propositæ est habenda.

In opere suo elegantissimo "Traité du Calcul Differentiel et Integral" cel. Lacroix, de separatione variabilium in æquationibus primi ordinis in genere differentialibus tractans, invenit etiam pro æquatione Riccatiana eandem, quam supra jam citavimus, expressionem valorum exponentis m.

Quamvis igitur omnes, qui in indagandis conditionibus hujus æquationis integrabilitatis elaborarunt analystæ, in unam eandemque incurrerint formulam; non tamen ipsa methodus, qua hunc in finem usi snnt, satis commonstrat, eandem omnes præbere casus, in quibus æquatio nostra potest integrari. Exacte vero demonstravit primus cel. Liouville, eos revera solos admitti posse, quamdiu ad valorem ipsius y per x exprimendum signa sola algebraica, logaritmi et exponentes signumque integrationis indefinitæ nobis satisfaciunt. Exposuit præterea idem in diario suo inclytissimo [5]) methodum, ubi ostendit æquationem:

$$d^2_x u = x^m u$$

in quam Riccatiana facile transformatur, sæpissime per integralia definita posse integrari, summatione scilicet, multiplicis ope quadraturæ instituta, duarum serierum, quibus valor ipsius u componitur. Hanc ipsam methodum, qua heic usus est Liouville postea docuit cel. Malmsten posse etiam adhiberi in æquatione generali

$$d^n_x u = a x^m u$$

per integralia definita integranda.

---

[5]) Journal de L'École Polytechnique Cah. XXII.

Notionem vero æquationis Riccatianæ latius conceptam voluit cel. noster Hill, ad eandem referens eas etiam æquationes primi ordinis differentiales, quarum coefficientes functiones sunt rationales ipsius x; ostenditque in commentatione, quam edidit in diario cel.mi Crelle, quomodo inveniantur radices hujus generis æquationum rationales.

Exinde patet, notionem æquationis Riccatianæ latius adhuc posse extendi, si eidem annumerare volumus omnes hujus formæ æquationes:

$$\underset{x}{dy} + a + by + cy^2 = o$$

in quibus coefficientes sunt functiones quæcumque ipsius x.

§. 1.

Initium jam ab eo faciamus quod in æquatione:

$$du + u^2 = X \text{ [6]}$$

1:o. X est functio rationalis ipsius x.

Supponamus igitur primum esse X functionem integram, quo quidem casu vel fracta vel etiam integra esse potest u. Sit ulterius X gradus cujusdam paris $m = 2n$, unde, si u integra esse poterit, necessario erit gradus n, scilicet

$$u = n_0 x^n + n_1 x^{n-1} + n_2 x^{n-2} + \ldots\ldots n_n = n^0 x$$

ideoque erit

$$X = (n_0^2 x^{2n} + 2n_0 n_1 x^{2n-1} + \ldots\ldots + 2n_0 n_n x^n + \ldots) +$$
$$(n_0 n x^{n-1} + n_1 . \overline{n-1}\, x^{n-2} + \ldots n_{n-1}) = m^0 x$$

---

[6]) Quomodo in hanc formam transformatur æquatio completa:

$$\underset{x}{dy} + a + by + cy^2 = o$$

docuit cel. Hill in commentatione supra citata, quam in diario cel:mi Crelle invenimus; Band. 25. Heft. 1.